CURSO DE ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA. Vol. 2.

LUCÍA CONTRERAS CABALLERO.

Profesora jubilada del Depto. de Matemáticas. Fac. de Ciencias.
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID.

Registrada la séptima versión de esta obra en 2012 como Curso de Álgebra Lineal en el Registro de la Propiedad Intelectual de la Comunidad de Madrid con número de asiento registral 16/2012/7857.

Lucía Contreras Caballero. Profesora Titular Numeraria Jubilada.
Departamento Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad Autónoma de Madrid.

TABLA DE CONTENIDOS.

ESPACIO EUCLÍDEO.

Introducción.

Un espacio euclídeo es un espacio vectorial real en el que se define un producto entre vectores que a cada par de vectores asocia un número real. El producto se llama producto escalar.

El producto escalar usual en R^2 y en R^3 está dado por las fórmulas:

$$u \cdot v = (u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$$

$$u \cdot v = (u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

Observemos que debido al teorema de Pitágoras, en R^2 y en R^3, el cuadrado de la longitud de un vector es igual al producto escalar del vector por sí mismo. Representamos la longitud del vector u por $\|u\|$: $\|u\|^2 = u{\cdot}u$. La longitud de un vector también se llama módulo del vector.

Un vector se llama unitario si es de longitud 1. Normalizar un vector cualquiera es obtener otro dependiente de él y unitario. Se normaliza un vector dividiéndolo por su longitud o módulo.

De lo anterior se deduce que la distancia entre dos puntos viene dada por la raiz cuadrada del producto escalar por sí mismo del vector cuyas componentes son las diferencias de coordenadas de los puntos.

En espacios con n variables, es útil tener un concepto similar al de distancia. Se generaliza a R^n el concepto de longitud de un vector y de distancia entre dos puntos utilizando el producto escalar generalizado.

DIAGONALIZACIÓN DE ENDOMORFISMOS.

Introducción.

Una aplicación lineal definida en un espacio vectorial con imagen en el mismo espacio vectorial se llama endomorfismo. Utilizaremos a partir de ahora la palabra endomorfismo por razones de brevedad.

La expresión matricial de un endomorfismo de un espacio vectorial depende de la base escogida. La matriz relacionada es una matriz cuadrada. Al hacer un cambio de base la matriz cambia y puede llegar a ser más sencilla. La interpretación geométrica de los endomorfismos con matrices diagonales es más fácil. Puede ser una proyección, una simetría, una composición de dilataciones y contracciones según determinadas direcciones. Nos planteamos por ello el problema de encontrar una base en la que la matriz de dicha expresión matricial sea diagonal.

Diagonalizar un endomorfismo es encontrar una base del espacio vectorial en el que la matriz correspondiente es diagonal. No todos los endomorfismos son diagonalizables.

Las distintas matrices que corresponden a un endomorfismo al cambiar de base están relacionadas de la forma siguiente: Si A y A' corresponden al mismo endomorfismo en distintas bases, $A' = C^{-1}AC$ donde C (la matriz del cambio de base) es una matriz con determinante distinto de cero. Estas matrices se llaman equivalentes. Si un endomorfismo es diagonalizable, existe una matriz diagonal equivalente a la matriz del endomorfismo.

Diagonalizar una matriz es encontrar una matriz diagonal equivalente a la dada. No todas las matrices son diagonalizables.

Si una matriz es diagonalizable, el endomorfismo expresado por dicha matriz (en cualquier base) es diagonalizable. En efecto, si dada la matriz A, existe una matriz C de cambio de base tal que $C^{-1}AC = D$, el endomorfismo expresado por la matriz A en la base $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ es diagonalizable, porque este endomorfismo se expresa por la matriz diagonal D en la base $\overline{B} = \{u_1, u_2, ..., u_n\} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}C$. Entonces, el endomorfismo expresado por la misma matriz A en otra base $B' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$ se expresa también por D en la base $\overline{B}' = \{u'_1, u'_2, ..., u'_n\} = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}C$ puesto que el cambio de base viene dado por la misma matriz C.

FORMAS CUADRÁTICAS.

Introducción.

Ya hemos estudiado ciertas formas bilineales, los productos escalares. Las formas bilineales en general, no tienen porqué ser simétricas ni definidas positivas.

A cada forma bilineal se le asocia una forma cuadrática; aunque a distintas formas bilineales resulta asociada la misma forma cuadrática, encontramos sĺo una forma bilineal simétrica (de matriz simétrica) asociada a ésta forma cuadrática. Veremos que su matriz puede llegar a ser diagonal, haciendo un cambio de base. Hallar la matriz diagonal, la base y el nuevo sistema de coordenadas en la que le corresponde es diagonalizar la forma cuadrática. Todas las formas cuadráticas son diagonalizables.

FORMAS DE JORDAN EN DIMENSIÓN 2, 3 y 4.

Introducción.

Las "formas de Jordan" son matrices relativamente sencillas correspondientes a endomorfismos no diagonalizables. Aunque no siempre son diagonales, son casi siempre matrices más sencillas que las correspondientes a los endomorfismos en la base canónica.

Las cajas de Jordan son matrices cuadradas que tienen iguales todos los elementos de la diagonal, tienen 1 en todos los sitios inmediatamente encima de la diagonal y ceros en los demás sitios:

La matriz:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

es una caja de Jordan de orden 3.

Una caja de Jordan de orden 1 es un número. Por lo que las matrices diagonales son yuxtaposición de cajas de Jordan de orden 1.

Se llaman formas de Jordan o matrices de Jordan a las matrices formadas por cajas de Jordan yuxtapuestas en la diagonal.

Se llaman "bases de Jordan" las bases en las que el endomorfismo se expresa por una forma de Jordan.

Cuando un endomorfismo es diagonalizable, si su matriz en una base dada es A, existe una matriz de cambio de base C tal que $C^{-1}AC$ es diagonal. Si el endomorfismo no es diagonalizable, esto no es posible, pero llamando J a la forma de Jordan, que es bastante sencilla, existe una matriz de cambio de base C tal que $C^{-1}AC = J$. Hay un <u>teorema</u> general, que no demostraremos aquí, que afirma la

<u>equivalencia de una matriz de números complejos a una matriz de Jordan</u>

Además, a un endomorfismo dado le corresponde sólo una forma de Jordan salvo el orden de las cajas. Entonces, a todas las matrices que corresponden al mismo endomorfismo en distintas bases corresponde una sola forma de Jordan. Teniéndose por tanto, que las formas de Jordan clasifican a las matrices y que matrices con formas de Jordan diferentes no pueden corresponder al mismo endomorfismo ni siquiera en distintas bases.

Lo cual puede servir para descartar si matrices provenientes de distintos observadores, corresponden al mismo fenómeno observado.

En este capítulo se demuestran los casos particulares del teorema anterior para matrices 2×2 y 3×3 de números reales, y para matrices 4×4 de números complejos por métodos directos y elementales.

APLICACIONES ORTOGONALES. ESPACIO AFÍN y MOVIMIENTOS.

Introducción.

Dados dos espacios vectoriales euclídeos, las aplicaciones lineales entre ellos que respetan la estructura euclídea se llaman aplicaciones ortogonales. Estas aplicaciones conservan las distancias y el origen. Ejemplos de transformaciones ortogonales son los giros y las simetrías ortogonales en el plano y las rotaciones vectoriales en el espacio.

Existe un teorema que reduce cualquier transformación ortogonal de R^n a un producto (o composición) de estos dos tipos de aplicaciones ortogonales (rotaciones vectoriales y simetrías). Además una rotación vectorial o un giro se pueden descomponer en composición de dos simetrías ortogonales, de donde se deduce que toda transformación ortogonal se puede descomponer en producto (o composición) de simetrías ortogonales.

CÓNICAS. ELIPSE, HIPERBOLA, PARABOLA.

Introducción.

Encontramos aquí las ecuaciones de la elipse, hipérbola y parábola en sus posiciones canónicas y luego vemos cómo cambian a las ecuaciones de las mismas curvas en una posición cualquiera. Concluimos que no sólo las ecuaciones de estas curvas son ecuaciones de segundo grado sino que las soluciones de cualquier ecuación de segundo grado con dos incóginitas constituyen una de estas curvas (una cónica) admitiendo los casos degenerados que son dos rectas que se cortan, dos rectas paralelas, una recta doble o el conjunto vacío.

También se ve cómo se detecta el tipo de curva y cómo se obtienen sus elementos característicos.

CUÁDRICAS.

Introducción.

En este capítulo se estudian las superficies de segundo grado, es decir, las superficies que son conjuntos de soluciones de una ecuación de segundo grado en las variables x, y, z. El estudio es similar al de las cónicas, encontrándose muchos más casos. En su clasificación influyen no sólo los invariantes de las matrices simétricas asociadas a las ecuaciones sino adeemás el rango de éstas.

Los ejes y planos de simetría de las cuádricas no degeneradas se determinan de manera análoga a cómo se determinan en las cónicas no degeneradas.

BIBLIOGRAFÍA TOTAL.

[A] A.D. Aleksandrov, A.N. Kolmogorov, M. A. Laurentiev y otros. La matemática: su contenido. métodos y significado. 1. Alianza Universidad. Alianza Ed. 1981.

[A] A. Almeida Costa. Cours d'Algebre Generale, Ed. Fundacao Calouste Gulbekian. Lisboa, 1974.

[A] J. Arvesú Carballo, R. Alvarez Nodarse, F. Marcellán Español. Algebra Lineal y aplicaciones. Ed. Síntesis. 1999.

[Ax] S. Axler. Linear Algebra done right. Springer. 1997.

[B] F. Brickell. Matrices and vector spaces. George Allen and Unwin Ltd, 1972.

[B] J. de Burgos. Curso de Algebra y Geometría. Ed. Alhambra 1982.

[B] J. de Burgos. Algebra Lineal y Geometría cartesiana. Ed. McGraw-Hill Interamericana de España S. A. U. 2006.

[C] M. Castellet, I. Llerena. Algebra Lineal y Geometría. Ed. Reverté. 1991.

[C] L. Contreras Caballero. Un método fácil para hallar una base de Jordan. XV Jornadas Luso-Españolas de Matemáticas. (1990).

[Fp] A. F. Filippov. A short proof of the theorem on the reduction of a matrix to Jordan form. Moscow Univ. Math. Bull.,26 (1971) 70-71.

[F-S] R. Fletcher and D.C. Sorensen. An algorithmmic derivation of the Jordan cannonical form. Amer. Math. Monthly, 90 (1983) 12-16.

[F] J. Frenkel, Géometrie pour l'éléve professeur, Ed. Hermann, París, 1973.

[G-W] A. Galperin and Z. Waksman. An elementary approach to Jordan theory. Amer. Math. Monthly 87 (1981),728-732.

[G] R. Godement, Algebra, Ed. Tecnos, Madrid, 1976.

[G] L. Golovina. Algebra Lineal y algunas de sus Aplicaciones. Ed. Mir. 1980.

[Hr] I.N. Herstein, Topics in Algebra, Ed. Wiley Sons, New York, 1975.

[L] D. C. Lay. Algebra Lineal y sus Aplicaciones. Ed. Prentice-Hall 2001.

[M] A.I. Maltsev, Fundamentos de Algebra Lineal, Ed. Mir. Moscow.

[S] G. Strang. Algebra Lineal y sus Aplicaciones. Addison-Wesley Iberoamericana. 1990.

[V] A. de la Villa. Problemas de Algebra. Ed. Clagsa, 1994.

[W] H. Wäliao. An elementary approach to the Jordan form of a matrix. Amer. Math. Monthly. 93 (1986)711-714.

[X] S. Xambó Deschamps. Geometría. Ediciones UPC,1997.